

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8.

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, или капиллярной, или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

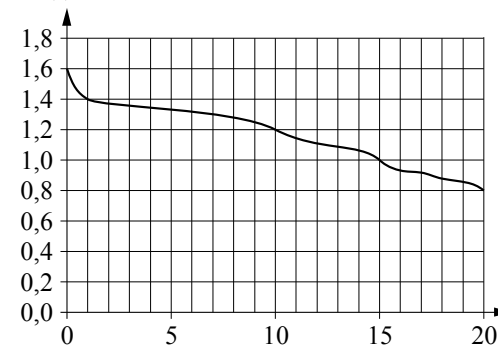
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

- 1** Система навигации самолёта информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 35 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

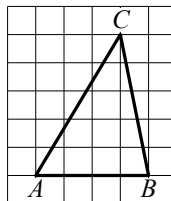
Ответ: _____.

- 2** При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, за сколько часов напряжение упадёт с 1,4 вольта до 1 вольта.



Ответ: _____.

- 3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC . Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB .



Ответ: _____.

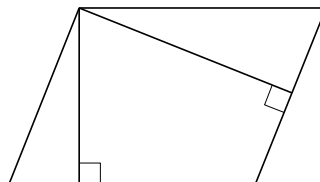
- 4 Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: _____.

- 5 Найдите корень уравнения $\log_8(5x + 47) = 3$.

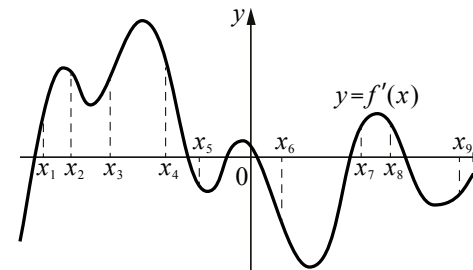
Ответ: _____.

- 6 Стороны параллелограмма равны 9 и 15. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 10. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.



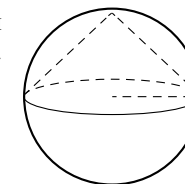
Ответ: _____.

- 7 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено девять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



Ответ: _____.

- 8 Конус вписан в шар (см. рисунок). Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 47. Найдите объём шара.



Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Часть 2

9

Найдите значение выражения $\frac{\left(5^{\frac{3}{5}} \cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{35^9}$.

Ответ: _____.

10

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 4500 \text{ км/ч}^2$. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 90 км/ч.

Ответ: _____.

11

Первая труба наполняет резервуар на 48 минут дольше, чем вторая. Обе трубы, работая одновременно, наполняют этот же резервуар за 45 минут. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Ответ: _____.

12

Найдите точку минимума функции

$$y = (1 - 2x)\cos x + 2\sin x + 7,$$

принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение

$$8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1,5; 3]$.

14

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB , A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 2$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

15

Решите неравенство $(20 - 11x) \cdot \log_{5x-9}(x^2 - 4x + 5) \leq 0$.

16

Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности, H — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC .

б) Найдите угол OHI , если $\angle ABC = 40^\circ$.

- 17 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет **целое** число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 10 млн рублей.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4 - y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

- 19 Множество чисел назовём *хорошим*, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел.

а) Является ли множество $\{100; 101; 102; \dots; 199\}$ *хорошим*?

б) Является ли множество $\{2; 4; 8; \dots; 2^{200}\}$ *хорошим*?

в) Сколько *хороших* четырёхэлементных подмножеств у множества

$$\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12\}?$$

ДОСРОЧНЫЙ ЕГЭ 2016
МАТЕМАТИКА. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

► 1.

Посмотрим, сколько в одном футе метров. Известно, что 1 метр равен 100 сантиметрам, тогда $1 \text{ фут} = 30,5 \text{ см} = 30,5 / 100 \text{ м} = 0,305 \text{ м}$. Теперь остается величину 35000 футов умножить на 0,305: $35000 \cdot 0,305 = 10675 \text{ м}$. Такая высота полета самолета не вызывает сомнений.

Ответ: 10675. ◀

► 2.

Определим предварительно цену деления горизонтальной оси – оси времени. Для этого возьмем две соседние отметки, обозначенные числами (например 0 и 5) и посчитаем количество делений между ними. 4 деления разбивают отрезок от 0 до 5 на пять отрезков, величиной $5 : 5 = 1$ час.

Теперь прикладываем линейку параллельно горизонтальной оси к отметке 1,4 В на вертикальной оси – ищем точку пересечения с графиком. Абсцисса этой точки равна 1 ч.

Прикладываем линейку параллельно горизонтальной оси к отметке 1 В на вертикальной оси, также ищем точку пересечения с графиком. Её абсцисса равна 15 ч.

Итак, с момента времени 1 ч напряжение начало падать с 1,4 В. Падение до 1 В кончилось в момент времени 15 ч. Остается найти разность: $15 - 1 = 14$.

Ответ: 14. ◀

► 3.

Прикладываем линейку к точке C перпендикулярно стороне AB и считаем количество клеточек от точки C до пересечения с AB вдоль прямой. Их ровно 5.

Ответ: 5. ◀

► 4.

Вероятность того, что сканер прослужит меньше двух лет, равна разности $1 - 0,87 = 0,13$. События "сканер прослужит больше года" и "сканер прослужит меньше двух лет" должны произойти вместе, поэтому нужно перемножить вероятности: $0,94 \cdot 0,13 = 0,1222$.

Ответ: 0,1222. ◀

► 5.

Исходное уравнение равносильно следующему:

$$5x + 47 = 8^3, \quad 5x + 47 = 512, \quad x = 93.$$

Ответ: 93. ◀

► 6.

Запишем формулу площади параллелограмма два раза:

$$S = ah_a = bh_b.$$

Искомая высота найдется: $9 \cdot 10 / 15 = 6$.

Ответ: 6. ◀

► 7.

Функция $f(x)$ убывает там, где функция $f'(x)$ отрицательна. Точки графика $y = f'(x)$ с абсциссами x_5, x_6, x_9 имеют отрицательные ординаты – всего три точки.

Ответ: 3. ◀

► 8.

Исходя из условия, очевидно $h_k = R_k = R_{сф}$. Тогда

$$V_k = \frac{1}{3} \pi R_k^2 h_k = \frac{1}{3} \pi R_{сф}^3 = 47.$$

В то же время

$$V_{\text{сф}} = \frac{4}{3}\pi R_{\text{сф}}^3 = 4 \cdot 47 = 188.$$

Ответ: 188. ◀

► 9.

$$= 5^{\frac{3}{5} \cdot 15} \cdot 7^{\frac{2}{3} \cdot 15} \cdot 5^{-9} \cdot 7^{-9} = 5^{9-9} \cdot 7^{10-9} = 7.$$

Ответ: 7. ◀

► 10.

Выражаем l из данной формулы.

$$v = \sqrt{2la}, \quad l = \frac{v^2}{2a}.$$

Поскольку никакие единицы измерения не подлежат преобразованиям, сразу подставляем указанные числа в полученную формулу.

$$l = \frac{v^2}{2a} = \frac{8100}{4500} = 1,8.$$

Ответ: 1,8. ◀

► 11.

Пусть объем резервуара равен 1 л. Производительность (или скорость заполнения резервуара, скорость истечения жидкости из трубы) первой трубы равна x л/мин, второй трубы – y л/мин.

Тогда время заполнения всего резервуара только первой трубой запишется так $t_1 = 1/x$, время заполнения всего резервуара только второй трубой $t_2 = 1/y$, время заполнения всего резервуара обеими трубами, работающими вместе $t_{12} = 1/(x + y)$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} = 45, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 48. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{45}, \\ y - x = 48xy, \end{cases} \quad y - \frac{1}{45} + y = 48y \left(\frac{1}{45} - y \right).$$

$$48 \cdot 45y^2 + 42y - 1 = 0, \quad \frac{D}{4} = 441 + 2160 = 2601.$$

$$y = \frac{-21 + 51}{48 \cdot 45} = \frac{30}{48 \cdot 45} = \frac{1}{72}.$$

Требуется найти величину $1/y = 72$.

Ответ: 72. ◀

► 12.

$$y = \cos x - 2x \cos x + 2 \sin x + 7.$$

$$y' = -\sin x - 2(\cos x - x \sin x) + 2 \cos x = -\sin x + 2x \sin x.$$

Приравниваем производную к нулю и ищем корни.

$$-\sin x + 2x \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ x = 0,5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, & n \in \mathbb{Z}, \\ x = 0,5. \end{cases}$$

Среди множества решений уравнения $y' = 0$ только $x = 0,5$ принадлежит указанному интервалу.

Ответ: 0,5. ◀

► 13.

Перепишем уравнение в следующем виде

$$(2^x)^3 - 3 \cdot (2^x)^2 - 2^x + 3 = 0.$$

Заменим $t = 2^x > 0$. Удачную группировку слагаемых заметить нетрудно.

$$t^2(t - 3) - (t - 3) = 0, \quad (t - 3)(t - 1)(t + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3, \\ t = 1, \\ t = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3, \\ 2^x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3, \\ x = 0. \end{cases}$$

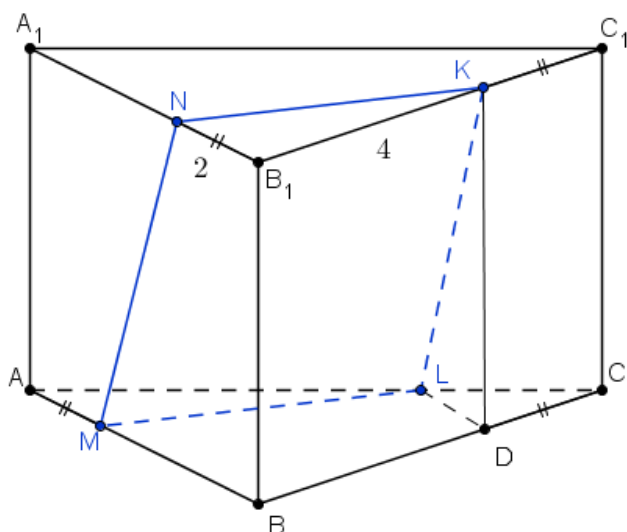
Понятно, что $\log_2 3 < 3$. Остается сравнить это число с 1,5.

$$1,5 \vee \log_2 3, \quad \log_2 2^{3/2} \vee \log_2 3, \quad 2\sqrt{2} \vee 3, \quad 8 < 9.$$

Значит $x = \log_2 3$ принадлежит указанному отрезку.

Ответ: а) $\log_2 3$, 0; б) $\log_2 3$. ◀

► 14.



Для получения точки L проведем через точку M прямую, параллельную NK .

Треугольник NB_1K с углом 60° имеет стороны 2 и 4, значит $NK \perp A_1B_1$, $ML \perp AB$.

Значит $ML = NK = 2\sqrt{3}$.

Найти MN не составляет труда: опустим перпендикуляр из N на AB ,

получим точку E (не показана). $NE = 2\sqrt{2}$, $ME = 2$, $MN = 2\sqrt{3}$.

Чтобы найти KL проведем перпендикуляр из K на BC , получим точку D . $DL = 2$, поскольку $DC = LC = 2$, а угол ACB равен 60° .

Тогда, из прямоугольного треугольника KDL с известными длинами катетов находим $KL = 2\sqrt{3}$.

Значит $MNKL$ – квадрат, его площадь равна 12.

Ответ: а) утверждение доказано; б) 12. ◀

► 15.

Выписываем ОДЗ.

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 > 0, \\ 5x - 9 > 0, \\ 5x - 9 \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{9}{5}, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Исходное неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} 20 - 11x \geq 0, \\ \log_{5x-9}(x^2 - 4x + 5) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{20}{11}, \\ (5x - 9 - 1)(x^2 - 4x + 5 - 1) \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 - 11x < 0, \\ \log_{5x-9}(x^2 - 4x + 5) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{20}{11}, \\ (5x - 9 - 1)(x^2 - 4x + 5 - 1) > 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{20}{11}, \\ x > 2. \end{cases}$$

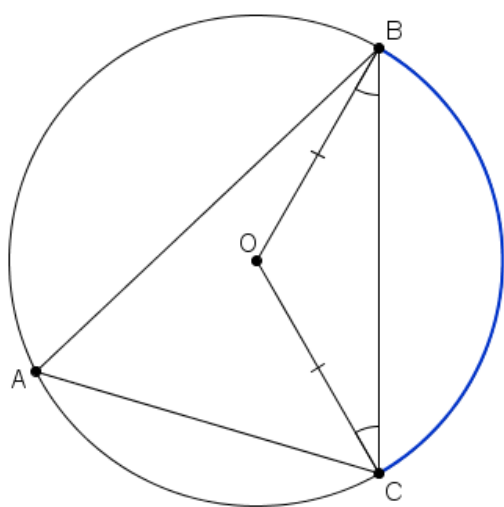
Осталось сравнить

$$\frac{9}{5} \vee \frac{20}{11}, \quad \frac{99}{55} < \frac{100}{55}.$$

С учетом ОДЗ: $9/5 < x \leq 20/11, x > 2$.

Ответ: $9/5 < x \leq 20/11, x > 2$. ◀

► 16.



а) Углы OBC и OCB равны, значит $\angle BAC = 2\alpha$. $\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$.

Центральный угол BOC опирается на ту же дугу, что и вписанный угол BAC . Известно, что вписанный угол измеряется половиной градусной меры дуги, на которую он опирается. Получим уравнение

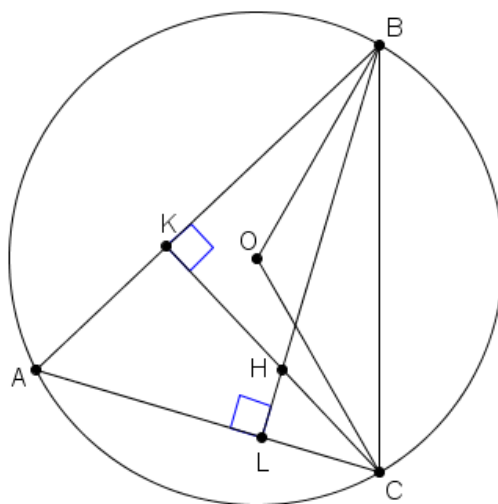
$$\alpha = 180^\circ - 2\alpha, \alpha = 30^\circ.$$

Отсюда $\angle BOC = 120^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$.

Из прямоугольного треугольника ABL $\angle ABL = 30^\circ$, из прямоугольного треугольника HVK $\angle HVK = 60^\circ$.

Углы BHK и BHC – смежные, значит $\angle BHC = 120^\circ = \angle BOC$.

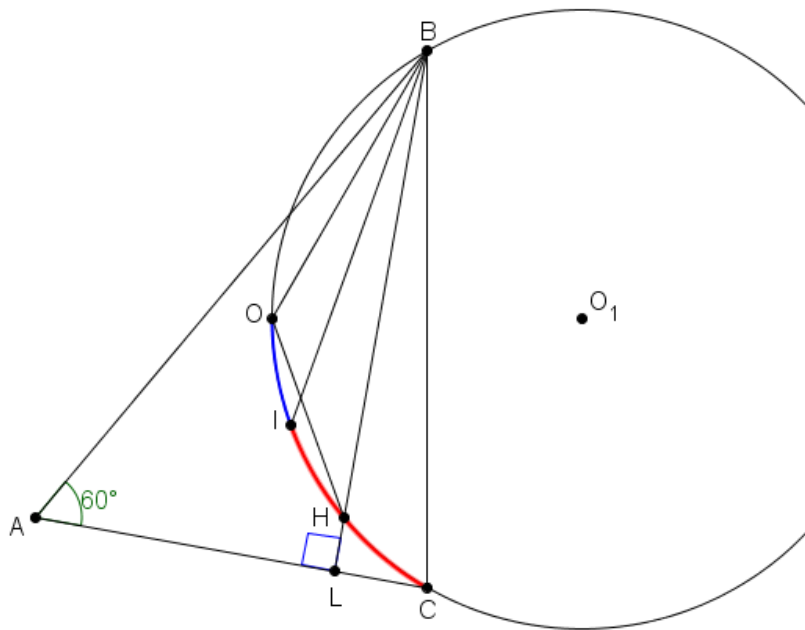
Оба угла равны, причем $\angle BOC$ по определению опирается на дугу окружности, описанной около треугольника BOC , которая отсекается стороной BC . Поскольку $\angle BHC$ тоже опирается на BC , то для точки H нет иной альтернативы, кроме принадлежности окружности, описанной около треугольника BOC .



б) Известно, что угол с вершиной в центре вписанной окружности, образованный двумя биссектрисами углов треугольника, равен удвоенному углу при вершине треугольника, биссектриса которого не является частью этого угла.

Значит $\angle BIC = 120^\circ$ и точка I также лежит на окружности, описанной около треугольника BOC .

Для наглядности изменим рисунок, чтобы угол OHI не был слишком острым. Точка O_1 – центр окружности, описанной около треугольника BOC .



Раз $\angle ABC = 40^\circ$, то $\angle IBC = 20^\circ$, значит градусная мера дуги CHI равна 40° .

С другой стороны $\angle BOC = 30^\circ$, значит градусная мера дуги OC равна 60° .

Получается, что градусная мера дуги IO равна 20° .

Искомый угол OHI , опирающийся на дугу 20° , равен половине её градусной меры, 10° .

Ответ: а) утверждение доказано; б) 10° . ◀

► 17.

Обозначим через $q = 1,1$ множитель роста вклада в N миллионов рублей. Будем выписывать значение вклада после увеличения в конце года.

После 1-го года: qN .

После 2-го года: q^2N .

После 3-го года: $q(q^2N + 1)$, потому что сначала была прибавка в 1 миллион, а потом увеличение.

После 4-го года: $q(q(q^2N + 1) + 1)$, по той же причине.

Получим неравенство:

$$q^4N + q^2 + q > 10, \quad N > \frac{10 - 1,1 - 1,21}{1,4641} = \frac{7,69}{1,4641}.$$

Осталось поделить в столбик числа 76900 и 14641.

$$\frac{76900}{14641} = 5 \frac{3695}{14641}.$$

Выходит, что N должно быть больше 5, ближайшее целое $N = 6$ подходит.

Ответ: 6 миллионов рублей. ◀

► 18.

Заметим разложение числителя на множители:

$$xy^2 - 2xy - 4y + 8 = 0, \quad xy(y - 2) - 4(y - 2) = 0,$$

$$(xy - 4)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ xy = 4. \end{cases}$$

Можем переписать систему в следующем виде:

$$\begin{cases} y < 4, \\ y = ax, \\ \begin{cases} y = 2, \\ xy = 4. \end{cases} \end{cases}$$

Первая строка системы разбивает координатную плоскость на две части. Нас устраивают точки, лежащие ниже прямой $y = 4$ и не лежащие на ней, потому что неравенство строгое.

Вторая строка системы задает семейство прямых, обязательно проходящих через начало координат $(0; 0)$.

Третья строка задает прямую $y = 2$, четвертая строка задает гиперболу $y = 4/x$.

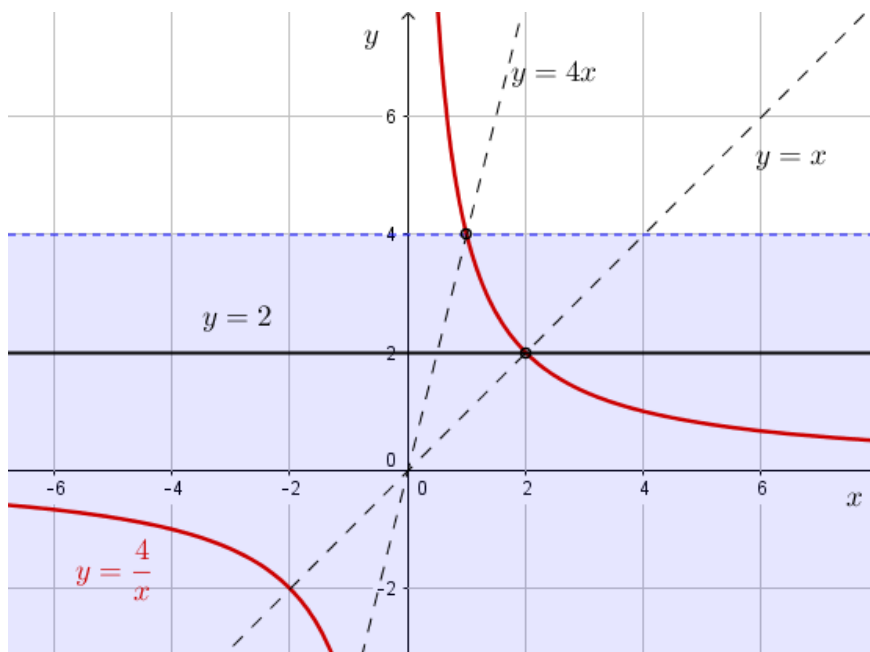
Изобразим на координатной плоскости задаваемые множества чисел.

Прямая $y = ax$ при отрицательных значениях a будут находиться во II и IV квадрантах и пересечений с гиперболой $y = 4/x$ не будет.

При $a = 0$ прямая $y = 0$ не имеет пересечений с участвующими графиками.

Значения $0 < a < 1$ удовлетворяют условию, при $a = 1$ имеются совпадающие решения $(2; 2)$, что противоречит условию.

Значения $1 < a < 4$ также удовлетворяют условию, при $a = 4$ $y = 4$, что не удовлетворяет неравенству системы.



Ответ: $a \in (0; 1) \cup (1; 4)$.

► 19.

а) Наибольшее из чисел множества, 199, является простым, поэтому указанное множество никак нельзя разбить на два подмножества с одинаковым произведением чисел. (Можно было бы взять и простое число 101.) Указанное множество не является *хорошим*.

б) Сумма показателей степеней $1 + 2 + 3 + \dots + 200 = 20100$ является четным числом, поэтому данное множество может быть разбито на два подмножества чисел с одинаковым произведением, значит оно является *хорошим*.

в) Числа 5, 7 и 11 исключаем из рассмотрения сразу, потому что другими числами невозможно получить произведение, равное какому-либо из данных чисел.

Подмножество 1, 3, 4, 12 является *хорошим*: $1 \cdot 12 = 3 \cdot 4$.

Подмножество 3, 4, 9, 12 является *хорошим*: $4 \cdot 9 = 3 \cdot 12$.

Дальнейший перебор показывает, что больше *хороших* подмножеств выбрать не удастся.

Итак, исходное множество содержит 2 *хороших* четырехэлементных подмножества.

Ответ: а) нет; б) да; в) 2.